第 56 卷 第 4 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 56 No. 4
2017 年 7 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Jul. 2017

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2017.04.004

复杂网络上具出生和死亡的一类分数阶SIR 模型的全局渐近稳定性*

魏晓丹[1,2]
（1. 大连民族大学计算机科学与工程学院，辽宁 大连 116600；
2. 吉林大学计算机科学与技术学院，吉林 长春 130012）

摘　要：研究了复杂网络上具出生和死亡的一类分数阶 SIR 模型地方病平衡解的全局渐近稳定性。在某些额外的条件下，这个问题已被讨论。通过构造一个 Lyapunov 函数，在没有任何额外的条件下，证明了该模型地方病平衡解的全局渐近稳定性。这个结果改进了已有文献中的一个结果。

关键词：复杂网络；分数阶微分方程；全局渐进稳定性；Lyapunov 函数方法
中图分类号：O175.13　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2017）04－0020－04

Global stability of a fractional order SIR model with birth and death on complex networks

WEI Xiaodan[1,2]
（1. School of Computer Science and Engineering, Dalian Minzu University, Dalian 116600, China;
2. School of Computer Science and Technology, Jilin University, Changchun 130012, China）

Abstract: The global stability of the endemic equilibrium of a fractional order SIR model with birth and death on complex networks is studied. Under some additional conditions, the problem is discussed. It is proved by constructing a Lyapunov function that without any additional condition, the endemic equilibrium is globally asymptotically stable. The result improves previous work.

Key words: complex networks; fractional order differential equation; global stability; Lyapunov function mehtod

自 1998 年 Nature 杂志上关于“小世界网络”和 1999 年 Science 杂志上关于“无标度网络”的两篇开创性文章发表以来，复杂网络的研究吸引了越来越多人的关注。2001 年，Pastor－Storras 等[1-2]利用平均场的方法建立了无标度网络的 SIS 模型，并求得了传播的临界值为 $\lambda_c=\frac{[k]}{[k^2]}$，其中 $[k]=\sum_{k=1}^{n}kp(k)$，$[k^2]=\sum_{k=1}^{n}k^2p(k)$，$p(k)$ 是度值为 k 的节点的分布函数，n 为所有节点的最大度数，并指出：如果传播率超过这个临界值，那么疾病将会持续传播，并转化为地方病。对这一结果的数学证明于2008 年由 Wang 等[3]给出。自 Pastor－Storras 和 Vespignani 的研究工作以来，复杂网络上流行病模型的传播动力学得到了广泛研究，这其中的一个重要课题便是复杂网络上微分方程模型的稳定性分析，参见文献［4－13］。

然而，目前所见到的复杂网络模型大多都是用整数阶微分方程模型来描述的，其局限是不能准确地描述记忆特征、历史依赖性等，而分数阶微分方程模型能很好地弥补这些缺陷。另一方面，现有的

* **收稿日期：**2017－04－06
基金项目：国家自然科学基金（11571062）；中央高校基本科研业务费（DC201502030407）
作者简介：魏晓丹（1978 年生），女；**研究方向：**复杂网络；E-mail：weixiaodancat@126.com

大多数网络中研究传播动力学是没有考虑出生和死亡的静态网络，但对于这类网络传染病模型，由于出生会导致网络的增长，而死亡会导致网络的衰减，因而会影响网络的结构，使得模型的稳定性分析更为困难。在文献［14］中，作者考虑了上述两个方面，并提出了如下复杂网络上的分数阶微分方程模型：

$$\begin{cases} D^{\alpha}S_k(t) = b(1 - S_k(t) - I_k(t) - R_k(t)) - \\ \qquad \beta k S_k(t)\Theta(t) - \mu S_k(t), \\ D^{\alpha}I_k(t) = \beta k S_k(t)\Theta(t) - (\mu+\gamma)I_k(t), \\ D^{\alpha}R_k(t) = \gamma I_k(t) - \mu R_k(t), \end{cases}$$
$$k = 1,2,\cdots,n \tag{1}$$

其中，$D^{\alpha}(0<\alpha\leqslant 1)$ 为 Caputo 导数，b,β,μ,γ 都是正数，$\Theta(t) = \frac{1}{[k]}\sum_{k=1}^{n} kp(k)I_k(t)$。Caputo 导数的定义参见文献［14－15］。他们得到了阈值

$$R_0 = \frac{b\beta[k^2]}{(\mu+\gamma)(b+\mu)[k]}$$

并证明了：如果 $R_0 < 1$，那么系统（1）的无病平衡解是全局渐进稳定的；而如果 $R_0 > 1$，那么系统（1）存在唯一的正平衡解 $E^*(S_k^*,I_k^*,R_k^*)$，其中 (S_k^*,I_k^*,R_k^*) 满足

$$\begin{cases} S_k^* = \dfrac{b\mu}{(b+\mu)(\beta k\Theta^* + \mu)}, \\ I_k^* = \dfrac{b\mu\beta k\Theta^*}{(b+\mu)(\mu+\gamma)(\beta k\Theta^* + \mu)}, \\ R_k^* = \dfrac{b\mu\beta k\Theta^*}{\gamma(b+\mu)(\mu+\gamma)(\beta k\Theta^* + \mu)}, \end{cases}$$
$$k = 1,2,\cdots,n$$

而 Θ^* 是如下方程的唯一正解：

$$\Theta = \frac{b\mu\beta}{[k](b+\mu)(\mu+\gamma)}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2p(k)\Theta}{\beta k\Theta+\mu}$$

而且，在假设 $N_k = \frac{b}{b+\mu}$（即出生率等于死亡率）以及矩阵 $B = \left(\frac{\beta kjp(j)S_k^*I_j^*}{[k]}\right)$ 是不可约的条件下，证明了地方病平衡解 $E^*(S_k^*,I_k^*,R_k^*)$ 是全局渐近稳定的。然而，出生率等于死亡率这样的假设并不符合现实。另一方面，检验矩阵 B 是否是可约的是非常困难的问题。在本文中，构造了一个 Lyapunov 函数，在没有上述假设的条件下，证明了 $E^*(S_k^*,I_k^*,R_k^*)$ 的全局渐近稳定性，从而改进了他们的结果。本文的主要结果为

定理 1　设 $R_0 > 1$，那么系统（1）的地方病平衡解是全局渐近稳定的。

1　若干引理

为证明定理 1，不加证明地引用如下引理。

引理 1[16]　设 $x(t)\in\mathbf{R}$ 是一个连续可导函数，则

$$D^{\alpha}x^2(t) \leqslant 2x(t)D^{\alpha}x(t)$$

引理 2[14]　设 $x(t)\in\mathbf{R}^+ = (0,+\infty)$ 是一个连续可导函数，则

$$D^{\alpha}\left[x(t) - x^* - x^*\ln\frac{x(t)}{x^*}\right] \leqslant \left(1 - \frac{x^*}{x(t)}\right)D^{\alpha}x(t),\ \forall x^* \in \mathbf{R}^+$$

2　定理的证明

定理 1 的证明　设 (S_k,I_k,R_k) 为问题（1）的一个解。令 $V = V_1 + V_2 + a_1V_3 + a_2V_4$，其中

$$V_1(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)^2,$$

$$V_2(t) = \Theta - \Theta^* - \Theta^*\ln\frac{\Theta}{\Theta^*},$$

$$V_3(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k - N_k^*)^2,$$

$$V_4(t) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(R_k - R_k^*)^2,$$

$$N_k = S_k + I_k + R_k,$$

$$N_k^* = \frac{b}{b+\mu},\ c_k = \frac{kp(k)}{[k]S_k^*}$$

并且 a_1,a_2 为正常数。接下来，计算函数 $V_i(i=1,2,3,4)$ 的导数。首先，由引理 1 及 S_k 满足的方程得

$$\begin{aligned} D^{\alpha}V_1 &\leqslant \sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)D^{\alpha}S_k = \\ &\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)[b(1-N_k) - \beta kS_k\Theta - \mu S_k)] = \\ &\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)\,[b(N_k^* - N_k) - \\ &\beta k(S_k\Theta - S_k^*\Theta^*) - \mu(S_k - S_k^*)] = \\ &b\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)(N_k^* - N_k) - \\ &\beta\sum_{k=1}^{n}kc_kS_k^*(S_k - S_k^*)(\Theta - \Theta^*) - \\ &\beta\Theta\sum_{k=1}^{n}kc_k(S_k - S_k^*)^2 - \mu\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)^2 \leqslant \\ &b\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k - S_k^*)(N_k^* - N_k) - \\ &\beta\sum_{k=1}^{n}kc_kS_k^*(S_k - S_k^*)(\Theta - \Theta^*) - \end{aligned}$$

$$\mu\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k-S_k^*)^2 \tag{2}$$

由 Young 不等式 $ab\leqslant\frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2(\varepsilon>0)$，得

$$(S_k-S_k^*)(N_k^*-N_k)\leqslant$$
$$\frac{\mu}{2b}(S_k-S_k^*)^2+\frac{b}{2\mu}(N_k-N_k^*)^2$$

将其代入式（2）得

$$D^\alpha V_1\leqslant-\beta\sum_{k=1}^{n}kc_kS_k^*(S_k-S_k^*)(\Theta-\Theta^*)+$$
$$\frac{b^2}{2\mu}\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k-N_k^*)^2-\frac{\mu}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k-S_k^*)^2 \tag{3}$$

利用引理 2 及 Θ 满足的方程：

$$D^\alpha\Theta=\left[\frac{1}{[k]}\sum_{k=1}^{n}\beta k^2p(k)S_k-(\mu+\gamma)\right]\Theta$$

得

$$D^\alpha V_2(t)\leqslant\left(1-\frac{\Theta^*}{\Theta}\right)D^\alpha\Theta=$$
$$\frac{1}{[k]}\sum_{k=1}^{n}\beta k^2p(k)(S_k-S_k^*)(\Theta-\Theta^*) \tag{4}$$

将式（3）和式（4）相加，并注意到 $c_k=\frac{kp(k)}{[k]S_k^*}$，得

$$D^\alpha V_1(t)+D^\alpha V_2(t)\leqslant$$
$$\frac{b^2}{2\mu}\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k-N_k^*)^2-\frac{\mu}{2}\sum_{k=1}^{n}c_k(S_k-S_k^*)^2 \tag{5}$$

利用引理 1 及 N_k 满足的方程：

$$D^\alpha N_k=b-(b+\mu)N_k$$

得

$$D^\alpha V_3\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k-N_k^*)D^\alpha N_k=$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k-N_k^*)[b-(b+\mu)N_k]=$$
$$-(b+\mu)\sum_{k=1}^{n}c_k(N_k-N_k^*)^2 \tag{6}$$

用引理 1 及 R_k 满足的方程得

$$D^\alpha V_4\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k(R_k-R_k^*)D^\alpha R_k=$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k(R_k-R_k^*)(\gamma I_k-\mu R_k)=$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k(R_k-R_k^*)[\gamma N_k-\gamma S_k-(\mu+\gamma)R_k]=$$
$$\sum_{k=1}^{n}c_k(R_k-R_k^*)[\gamma(N_k-N_k^*)-$$
$$\gamma(S_k-S_k^*)-(\mu+\gamma)(R_k-R_k^*)] \tag{7}$$

由 Young 不等式得

$$(R_k-R_k^*)(N_k-N_k^*)\leqslant$$
$$\frac{\gamma+\mu}{4\gamma}(R_k-R_k^*)^2+\frac{\gamma}{\gamma+\mu}(N_k-N_k^*)^2,$$
$$-(S_k-S_k^*)(R_k-R_k^*)\leqslant$$
$$\frac{\gamma+\mu}{4\gamma}(R_k-R_k^*)^2+\frac{\gamma}{\gamma+\mu}(S_k-S_k^*)^2$$

将这两不等式代入式（7）得

$$D^\alpha V_4\leqslant\sum_{k=1}^{n}c_k\left[\frac{\gamma^2}{\mu+\gamma}(N_k-N_k^*)^2+\right.$$
$$\left.\frac{\gamma^2}{\mu+\gamma}(S_k-S_k^*)^2-\frac{\mu+\gamma}{2}(R_k-R_k^*)^2\right] \tag{8}$$

联合式（5），式（6）及式（8），并取

$$a_1=\frac{1}{\mu+\gamma}\left(\frac{\mu}{2}+\frac{b^2}{\mu}\right),a_2=\frac{\mu(\mu+\gamma)}{4\gamma^2}$$

有

$$D^\alpha V=D^\alpha V_1+D^\alpha V_2+a_1D^\alpha V_3+a_2D^\alpha V_4\leqslant$$
$$-\sum_{k=1}^{n}c_k\left[\left(\frac{\mu}{4}+\frac{b^2}{2\mu}\right)(N_k-N_k^*)^2+\right.$$
$$\left.\frac{\mu}{4}(S_k-S_k^*)^2+\frac{\mu(\mu+\gamma)^2}{8\gamma^2}(R_k-R_k^*)^2\right]$$

而且，$D^\alpha V=0$ 当且仅当 $(S_k,I_k,R_k)=(S_k^*,I_k^*,R_k^*)$，$k=1,2,\cdots,n$。由文献［14］中定理 4.5 和引理 2.5 知，(S_k^*,I_k^*,R_k^*) 是全局渐近稳定性的。证毕。

参考文献：

［1］ PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic spreading in scale-free networks［J］. Physical Review Letter, 2001, 86(14): 3200－3203.

［2］ PASTOR-SATORRAS R, VESPIGNANI A. Epidemic dynamics in finite size scale-free networks［J］. Physical Review E, 2002, 65(3): 035108(R).

［3］ WANG L, DAI G Z. Global stability of virus spreading in complex heterogeneous newworks［J］. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2008, 68(5): 1495－1502.

［4］ LIU J Z, TANG Y F, YANG Z R. The spreading of disease with birth and death networks［J］. Journal of Statistic Mechanics, 2004, 2004: P08008.

［5］ YANG M, CHEN G R, FU X C. A modified SIS model with an infective medium on complex networks and its global stability［J］. Physica A, 2011, 390: 2408－2413.

［6］ LIU J L, ZHANG T L. Epidemic spreading of an SEIRS model in scale-free networks［J］. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2011, 16(8): 3375－3384.

［7］ ZHANG J P, JIN Z. Epidemic spreading on complex networks with community structure［J］. Applied Mathematics and Computation, 2012, 219(6): 2829－2838.

（下转第 27 页）

从而在 $(B_R\setminus \overline{B}_{M_1})\cap K$ 中，算子 A 至少有一个不动点，即问题（8）有一个超过 w 的解 y，这也表明 $y-w$ 是问题（1）的正解。证毕。

参考文献：

［1］ 郑祖庥. 分数微分方程的发展和应用［J］. 徐州师范大学学报（自然科学版），2008，26（2）：1－10.
ZHENG Z X. On the developments and applications of fractional differential equations［J］. Journal of Xuzhou Normal University（Natural Science Edition），2008，26（2）：1－10.

［2］ 程金发. 分数阶差分方程理论［M］. 厦门：厦门大学出版社，2011.

［3］ ATICI F M，ELOE P W. A transform method in discrete fractional calculus［J］. International Journal of Difference Equations，2007，2（2）：165－176.

［4］ GOODRICH C S. On a first-order semipositone discrete fractional boundary value problem［J］. Archiv der Mathematik，2012，99（6）：509－518.

［5］ GOODRICH C S. On discrete sequential fractional boundary value problems［J］. J Math Anal Appl，2012，385（1）：111－124.

［6］ FERREIRA R A C. Existence and uniqueness of solution to some discrete fractional boundary value problems of order less than one［J］. Journal of Difference Equations and Applications，2013，19（5）：1－7.

［7］ LV Z，GONG Y，CHEN Y. Multiplicity and uniqueness for a class of discrete fractional boundary value problems［J］. Applications of Mathematics，2014，59（6）：673－695.

［8］ 王金华，向红军. 一类分数阶差分方程边值问题多重正解的存在性［J］. 高校应用数学学报，2016，31（2）：167－175.
WANG J H，XIANG H J. Existence of multiple positive solutions for a boundary value problem of fractional difference equation［J］. Applied Mathematics A Journal of Chinese Universities，2016，31（2）：167－175.

［9］ 王金华，向红军，赵育林. 一类非线性分数阶差分方程边值问题解的存在性及 Ulam 稳定性［J］. 中山大学学报（自然科学版），2016，55（2）：1－6.
WANG J H，XIANG H J，ZHAO Y L. Existence and Ulam stability of solutions for a boundary value problem of nonlinear fractional difference equation［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2016，55（2）：1－6.

［10］ 袁利国. 分数阶时滞广义 Logistic 方程解的研究［J］. 中山大学学报（自然科学版），2014，53（2）：44－48.
YUAN L G. Research on solutions of fractional-order generalized logistic equation with delay［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2014，53（2）：44－48.

［11］ 杨志林. 非线性二阶常微分方程 Robin 问题的正解［J］. 青岛理工大学学报，2013，34（1）：5－15.
YANG Z L. Positive solutions of the Robin problem for nonlinear second-order ordinary differential equations［J］. Journal of Qingdao Technological University，2013，34（1）：5－15.

（上接第 22 页）

［8］ ZHU G H，FU X C，CHEN G R. Global attractivity of a network-based epidemic SIS model with nonlinear infectivity［J］. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation，2012，17（6）：2588－2594.

［9］ FERREIRA S，CASTELLANO C，PASTOR-SATORRAS R. Epidemic thresholds of the susceptible-infected-susceptible model on networks：a comparison of numerical and theoretical results［J］. Physical Review E，2012，86（4）：041125.

［10］ LI T，WANG Y M，GUAN Z H. Spreading dynamics of a SIQRS epidemic model on scale-free networks［J］. Communication in Nonlinear Science Numerical Simulation，2014，19（3）：686－692.

［12］ LI C. Dynamics of a network-based SIS epidemic model with nonmonotone incidence rate［J］. Physica A，2015，427：234－243.

［13］ WEI X D，LIU L J，ZHOU W S. Global stability and attractivity of a network-based SIS epidemic model with nonmonotone incidence rate［J］. Physica A，2017，469：789－798.

［14］ HUO J J，ZHAO H Y. Dynamical analysis of a fractional SIR model with birth and death on heterogeneous complex networks［J］. Physica A，2016，448：41－56.

［15］ 丁金凤，金世欣，张毅. 基于 Caputo 导数下的含时滞的 Hamilton 系统的分数阶 Noether 理论［J］. 中山大学学报（自然科学版），2016，55（6）：79－85.
DING J F，JIN S X，ZHANG Y. Fractional Noether theorems for Hamilton system with time delay based on Caputo dervitaves［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2016，55（6）：79－85.

［16］ AGUILA-CAMACHO N，DUARTE-MERMOUD M A，GALLEGOS J A. Lyapunov functions for fractional order systems［J］. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation，2014，19（9）：2951－2957.